

Samstagsuniversität der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

Vortragender: Dr. Christoph Schwerdt
Institut für Mathematik

Titel: Die reellen Zahlen - Ein Einblick in die Mathematik

Am: 20. Juni 2026 um 11:00 Uhr im Hörsaal 1 der Physik
(Albert-Einstein-Straße 24)

Die reellen Zahlen - Ein Einblick in die Mathematik

Kann ich Ihr Interesse mit einem Vortrag über Zahlenmengen denn überhaupt wecken? Was soll denn so interessant an Zahlen sein? Kennt man schon aus der Schule, oder? Aber dazu riet Edmund Landau (1877-1938) in *Grundlagen der Analysis* (1930):

„Bitte vergiß alles was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt.“

Gut, das wirkt abstoßend und bestärkt eher unsere Vorstellung des arroganten Mathematikers im Elfenbeinturm. Andererseits, verbirgt sich hinter dem Schulstoff vielleicht doch mehr? Was genau sind denn nun reelle Zahlen? Könnten wir diese einem fragenden Kind erklären? Es ist gar nicht so einfach wie Sie sehen werden.

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ So sagte es einst Leopold Kronecker (1823-1891). Schnell und einfach lässt sich die Menge der Brüche \mathbb{Q} aus \mathbb{Z} heraus definieren. Doch bereits auf uralten babylonischen Tontafeln treffen wir auf ein Beispiel einer Zahl, welche sich nicht durch die Menge der Brüche beschreiben lässt. Dort sehen wir ein rechtwinkeliges Dreieck mit einer Strecke der Länge $\sqrt{2}$. Was ist besonders an dieser Länge? Nun, legen Sie mal ein Lineal an. Egal wie fein Ihr Lineal ist, die Strecke endet stets zwischen zwei Markierungen. Es ist noch absurder; je nach Feinheit endet sie mal näher an der linken und mal näher an der rechten Markierung, ohne diese je zu berühren. Die Strecke hat einen Anfang und ein Ende, dennoch ist es als verweigere sie eine exakte Messung.

Ein weiteres solches Beispiel ist eine zum Kreis gebogene Strecke der Länge 2π . Diese eigenartigen Zahlen führen uns in die Welt der reellen Zahlen \mathbb{R} . Aber wie definiert man diese Menge? Wir folgen Georg Cantor (1845 - 1918) und seinem Zugang über sogenannte Fundamental- oder Cauchyfolgen, welche wir am Beispiel der Nachkommastellen von π verstehen wollen.

Falls es die Zeit erlaubt, vergleichen wir abschließend \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} hinsichtlich ihrer Größe miteinander. Instinktiv nehmen wir an, dass die Anzahl der Elemente von \mathbb{N} nach \mathbb{R} stets zugenommen hat. Cantor verblüfft uns mit seinem mengentheoretischen Zugang nun vollkommen, indem er zeigt, dass \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} alle gleich viele Elemente besitzen. Lediglich \mathbb{R} ist wesentlich größer. So endet dieser Ausblick auf den Vortrag endet auch mit einem Zitat David Hilberts (1862 - 1943):

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“

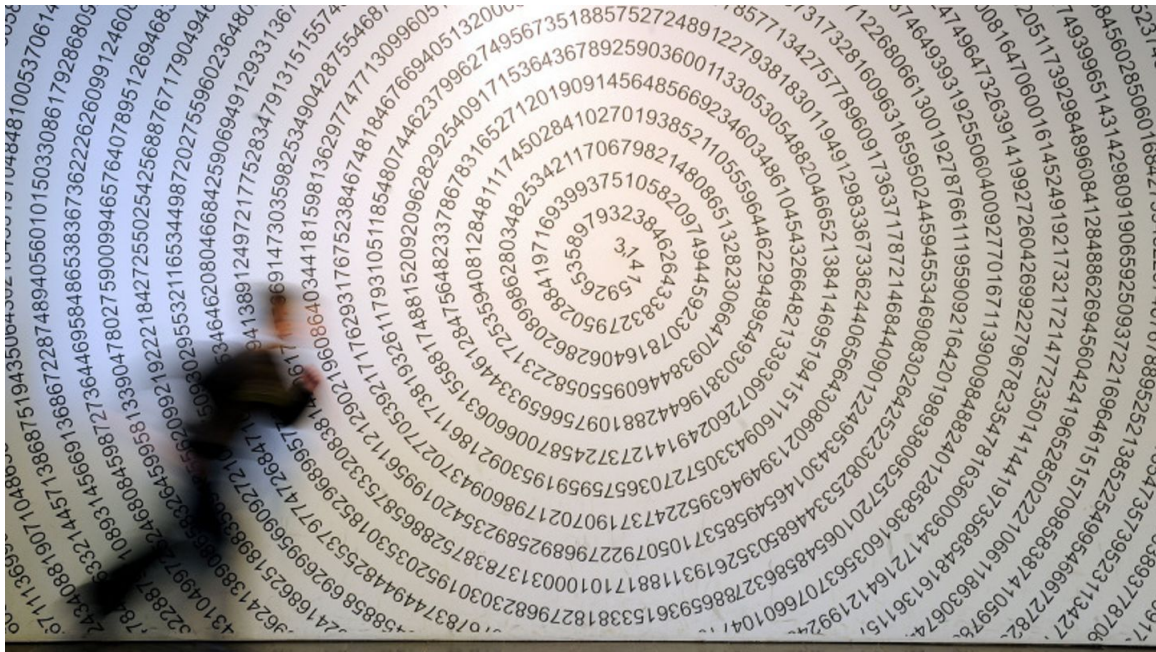


Abbildung 1: Nachkommastellen von π

Quelle: <https://www.zeit.de/wissen/2021-08/kreiszahl-pi-weltrekord-berechnung-62-billionen-stellen-mathematik>